



**CONCOURS EXTERNE DE CONTRÔLEUR
DES FINANCES PUBLIQUES DE DEUXIÈME CLASSE**

ANNÉE 2023

ÉPREUVE ÉCRITE D'ADMISSIBILITÉ N° 2

Durée : 3 heures - Coefficient : 3

Le candidat traitera le présent sujet correspondant à l'option formulée dans son dossier d'inscription :

- Résolution d'un ou plusieurs problèmes de mathématiques**

Toute note inférieure à 5/20 est éliminatoire.

Recommandations importantes

Le candidat trouvera au verso la manière de servir la copie dédiée.

Sous peine d'annulation, en dehors du volet rabattable d'en-tête, les copies doivent être totalement anonymes et ne comporter aucun élément d'identification tels que nom, prénom, signature, paraphe, localisation, initiale, numéro ou toute autre indication, même fictive, étrangère au traitement du sujet.

Sur les copies, les candidats devront écrire et souligner si nécessaire au stylo bille, plume ou feutre de couleur noire ou bleue uniquement. De même, l'utilisation de crayon surligneur est interdite.

Il devra obligatoirement se conformer aux directives données.

Le candidat complètera l'intérieur du volet rabattable des informations demandées et se conformera aux instructions données

Nom de naissance

Prénom usuel

Jour, mois et année

Signature obligatoire

Numéro de candidature

À compléter par le candidat

Ne rabattre le cache qu'en présence d'un membre de la commission de surveillance

ÉTIQUETTE D'IDENTIFICATION

Faire comme ceci

Ne pas faire

Liberté • Égalité • Fraternité
RÉPUBLIQUE FRANÇAISE

Axe de lecture code à barres candidat

Concours externe - interne - professionnel - ou examen professionnel ⁽¹⁾

⁽¹⁾ Rayer les mentions inutiles

Externe

Pour l'emploi de : **Contrôleur des Finances publiques**

Épreuve n° : **2**

Matière : **030 – Mathématiques**

Date : **1 7 0 1 2 0 2 3**

Nombre d'intercalaires supplémentaires :

Préciser éventuellement le nombre d'intercalaires supplémentaires

À L'ATTENTION DU CANDIDAT

En dehors de la zone d'identification rabattable, les copies doivent être totalement anonymes et ne comporter aucun élément d'identification tel que nom, prénom, signature, paraphe, localisation, initiale, numéro, ou toute autre indication même fictive étrangère au traitement du sujet.

Il est demandé aux candidats d'écrire et de souligner si nécessaire au stylo bille, plume ou feutre, de couleur noire ou bleue uniquement. Une autre couleur pourrait être considérée comme un signe distinctif par le jury, auquel cas la note de zéro serait attribuée. De même, l'utilisation de crayon surligneur est interdite.

Les étiquettes d'identification codes à barres, destinées à permettre à l'administration d'identifier votre copie, ne doivent être détachées et collées dans les deux cadres prévus à cet effet qu'en présence d'un membre de la commission de surveillance.

Suivre les instructions données pour les étiquettes d'identification

RÉSERVÉ À L'ADMINISTRATION

À L'ATTENTION DU CORRECTEUR

Pour remplir ce document :

Utilisez un stylo ou une pointe feutre de couleur NOIRE ou BLEUE.

EXEMPLE DE MARQUAGE : Faire comme ceci Ne pas faire

Pour porter votre note, cochez les gélules correspondantes.

Reportez la note dans les zones **NOTE / 20** et dans le cadre **A**.

En cas d'erreur de codification dans le report des notes cochez la case **erreur** et reportez la note dans le cadre **B**.

Cadre A réservé à la notation				Cadre B réservé à la notation rectificative			
20	19	18		20	19	18	
17	16	15		17	16	15	
14	13	12		14	13	12	
11	10	09		11	10	09	
08	07	06		08	07	06	
05	04	03		05	04	03	
02	01	00		02	01	00	
Décimales				Décimales			
,00	,25	,50	,75	,00	,25	,50	,75
				Erreur			

NOTE / 20

NOTE / 20

EN AUCUN CAS, LE CANDIDAT NE FERMERA LE VOLET RABATTABLE AVANT D'Y AVOIR ÉTÉ AUTORISÉ PAR LA COMMISSION DE SURVEILLANCE

SUJET

MATHÉMATIQUES

Les candidates et les candidats peuvent avoir à leur disposition sur la table de concours le matériel d'écriture, une règle, un correcteur, des surligneurs et le matériel spécifique ci-après.

Les matériels autorisés sont les suivants :

- les calculatrices non programmables sans mémoire alphanumérique ;*
- les calculatrices avec mémoire alphanumérique et/ou avec écran graphique qui disposent d'une fonctionnalité « mode examen »;*
- les règles de calcul, équerres, compas, rapporteurs et tables de logarithmes ne comportant aucune formule algébrique, géométrique ou trigonométrique.*

Ce sujet comporte cinq exercices, indépendants les uns des autres.

Vous traiterez l'ensemble des exercices dans l'ordre choisi.

EXERCICE 1

Soit f la fonction définie sur son ensemble de définition D_f par $f(x) = x^2 e^x$.

Partie 1

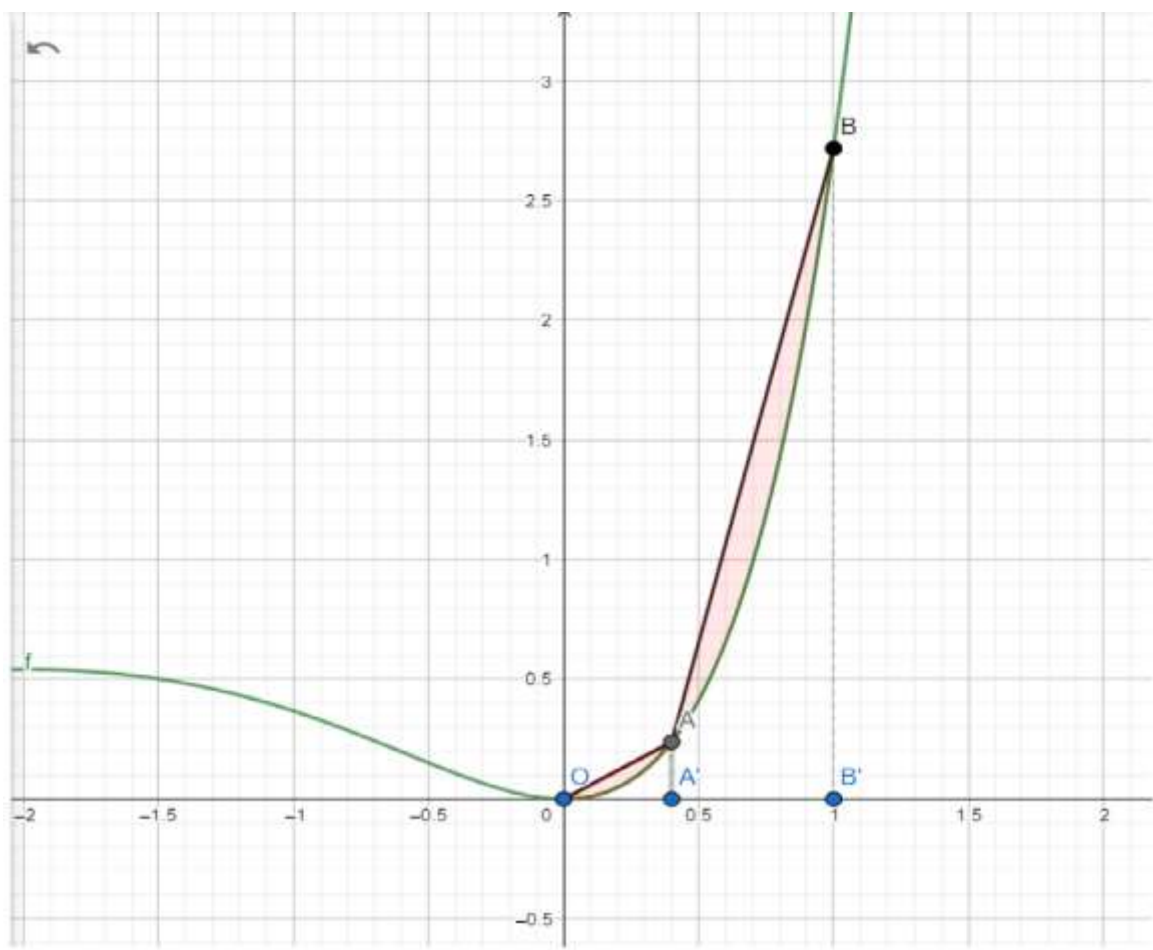
1. Déterminer D_f et étudier les limites de f sur son ensemble de définition.
2. Calculer $f'(x)$ et en déterminer les racines.
3. Soit la fonction F définie sur $\mathbb{R}$ par $F(x) = (ax^2 + bx + c) e^x$, avec a , b et c réels.
Calculer la dérivée F' de F , et déterminer a , b et c tels que F soit une primitive de f .
4. En déduire $\int_0^1 x^2 e^x dx$.

Partie 2

Soit A un point de la courbe C_f représentative de la fonction f , d'abscisse a et d'ordonnée $f(a)$, où $a \in [0; 1]$.

Soit B le point de coordonnées $(1; f(1))$, A' le point de coordonnées $(a; 0)$ et B' le point de coordonnées $(1; 0)$;

Soit A l'aire délimitée par la courbe C_f , et les segments $[OA]$ et $[AB]$



1. Déterminer l'aire du triangle OAA'.

2. Montrer que l'aire du quadrilatère A'ABB' est égale à $\frac{-a^3 e^a + a^2 e^a - ae + e}{2}$.

3. En déduire l'aire A en unité d'aire.

Partie 3

Dans cette partie, on cherche à déterminer le point d'abscisse a dans $[0;1]$ tel que l'aire A est minimale.

Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}^+^*$ par $g(x) = x^2(e^x - \frac{e}{x}) - e + 4$.

1. Calculer $g'(x)$ pour tout réel x de $[0; +\infty[$.

2. Vérifier que la fonction dérivée seconde g'' est définie sur $[0; +\infty[$ par :

$$g''(x) = e^x (x^2 + 4x + 2).$$

3. En déduire les variations de la fonction g' sur $[0; +\infty[$.

4. Établir que l'équation $g'(x) = 0$ admet une solution unique α dans l'intervalle $[0; +\infty[$. Déterminer une valeur approchée de α à 10^{-1} près par défaut.

5. En déduire les variations de g sur $\mathbb{R}^+^*$.

6. En utilisant les réponses aux questions des parties 1, 2 et 3, montrer qu'il existe un point d'abscisse a pour laquelle l'aire A est minimale. Donner cette valeur de a .

EXERCICE 2

Un centre aéré propose aux enfants de s'inscrire chaque semaine à une activité. L'une de ces activités est le tir à l'arc. Une étude effectuée sur l'année scolaire précédente montre que d'une semaine sur l'autre 5 % des enfants ne se réinscrivent pas au tir à l'arc, alors que dans le même temps, 10 nouveaux enfants s'y inscrivent. Le directeur se base sur ces résultats pour prévoir l'évolution des inscriptions pour la nouvelle année scolaire.

La première semaine de cette nouvelle année scolaire, 80 enfants se sont inscrits au tir à l'arc.

On note U_0 le nombre initial d'enfants inscrits au tir à l'arc, ainsi $U_0 = 80$.

Pour tout entier naturel n , on note U_n le nombre d'enfants inscrits au tir à l'arc au bout de n semaines.

1. Montrer que $U_1 = 86$.
2. Pour tout entier naturel n , exprimer U_{n+1} en fonction de U_n .
3. Pour tout entier naturel n , on pose $A_n = U_n - 200$
 - a. Montrer que la suite (A_n) est une suite géométrique dont on précisera la raison et le premier terme.
 - b. Pour tout entier naturel n , exprimer A_n en fonction de n .
 - c. Calculer la somme des dix premiers termes de la suite (A_n) .
 - d. Montrer que pour tout entier naturel n , on a : $U_n = 200 - 120 \times 0,95^n$.
4.
 - a. Montrer que pour tout entier naturel n , on a : $U_{n+1} - U_n = 6 \times 0,95^n$.
 - b. En déduire que le nombre d'inscriptions au tir à l'arc augmente toutes les semaines.
5. Après combien de semaines, le contexte restant le même, le nombre d'enfants inscrits à l'activité tir à l'arc aura-t-il strictement doublé ?

EXERCICE 3

Les parties 1 et 2 sont indépendantes.

Partie 1 : loi binomiale

Existe-t-il une (des) loi(s) binomiale(s) $\mathcal{B}(n;p)$, de paramètres n et p , d'espérance égale à 6 et d'écart-type égal à 0,4 ?

Partie 2 : probabilités conditionnelles

A) Un grossiste achète des boîtes de café chez deux fournisseurs. Il achète 70 % de ses boîtes chez le fournisseur A et 30 % chez le fournisseur B.

5% des boîtes provenant du fournisseur A présentent des traces de pesticides et 10 % de celles provenant du fournisseur B présentent aussi des traces de pesticides.

On prélève au hasard une boîte du stock du grossiste et on considère les événements suivants :

événement A : "la boîte provient du fournisseur A" ;

événement B : "la boîte provient du fournisseur B" ;

événement P : "la boîte présente des traces de pesticides".

1. Traduire l'énoncé sous forme d'un arbre pondéré.
2. Quelle est la probabilité de l'événement $B \cap \bar{P}$?
3. Justifier que la probabilité que la boîte prélevée ne présente aucune trace de pesticides est égale à 0,935.
4. On constate que la boîte prélevée présente des traces de pesticides.
Quelle est la probabilité que cette boîte provienne du fournisseur B ?

B) Le gérant d'un bar achète 10 boîtes chez le grossiste précédent. On suppose que le stock de ce dernier est suffisamment important pour modéliser cette situation par un tirage aléatoire de 10 boîtes avec remise.

On considère la variable aléatoire X qui associe à ce prélèvement de 10 boîtes, le nombre de boîtes sans trace de pesticides.

1. Justifier que la variable aléatoire X suit une loi binomiale dont on précisera les paramètres.
2. Calculer la probabilité que les 10 boîtes soient sans trace de pesticides.
3. Calculer la probabilité qu'au moins 8 boîtes ne présentent aucune trace de pesticides.

EXERCICE 4

Les parties 1 et 2 sont indépendantes.

Partie 1

Soient les vecteurs $\vec{u} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\vec{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\vec{w} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}$ dans le repère orthonormé de base $B(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

Soit la base B' d'origine O' et de vecteurs directeurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$.

1. La base B' est-elle une base de l'espace ? Le cas échéant, est-elle directe ?

2. Soit $\vec{t} = \begin{pmatrix} m \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ où $m \in \mathbb{R}$, dans la base B .

Déterminer les coordonnées de $\vec{t}$ dans la base B' .

3. Déterminer la (les) valeur(s) de m pour laquelle (lesquelles) les vecteurs $\vec{t}$, $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont coplanaires.

Partie 2

Dans le repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, on définit le plan P_m par
 $\forall m \in \mathbb{R} \quad (4+m^2)x + (4-m^2)y - 4mz = m+8$.

Soit Ω_0 le point de coordonnées $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix}$ et Δ la droite passant par Ω_0 dirigée par $\vec{i}$.

1. Justifier que le plan P_m est bien un plan pour tout m dans $\mathbb{R}$.

2. Soit Ω_x le point de Δ de coordonnées $\begin{pmatrix} x \\ 1 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix}$.

On admettra que le projeté orthogonal H de Ω_x sur P_m a pour coordonnées :

$$H \begin{pmatrix} \frac{x+1}{2} \\ \frac{(1-x)(4-m^2)}{2(m^2+4)} + 1 \\ \frac{-2m(1-x)}{m^2+4} - \frac{1}{4} \end{pmatrix}$$

Montrer que la distance de P_m à Ω_x est égale à $\frac{|x-1|}{\sqrt{2}}$.

Quelle remarque peut-on faire ?

3. Déterminer les coordonnées du (des) point(s) appartenant à Δ et centre(s) de la (les) sphère(s) de rayon $1/2$ et tangente à P_m .

EXERCICE 5

Résoudre l'équation (E) d'inconnue x suivante :

$$(E) \quad \ln(x-1) + \ln(2-x) = \ln(6x)$$

