

**CONCOURS EXTERNE DE CONTRÔLEUR
DES FINANCES PUBLIQUES DE DEUXIÈME CLASSE**

ANNÉE 2024

ÉPREUVE ÉCRITE D'ADMISSIBILITÉ N° 2

Durée : 3 heures – Coefficient : 3

Le candidat traitera le présent sujet correspondant à l'option formulée dans son dossier d'inscription :

– Résolution d'un ou plusieurs problèmes de mathématiques

Toute note inférieure à 5/20 est éliminatoire.

Le candidat trouvera au verso la manière de servir la copie dédiée.

Il devra obligatoirement se conformer aux directives données.

NOTE AUX CANDIDATS

→ Passation de l'épreuve :

1. Sur les copies :

- vous devrez **composer lisiblement sur les copies avec un stylo foncé** : bleu ou noir. Toute copie illisible lors de la numérisation du fait d'une encre trop claire **ne sera pas corrigée (l'usage de stylo à encre effaçable est fortement déconseillé)** ;
- l'usage du surligneur et des stylos de couleurs est interdit ;
- pour toute correction, il est recommandé de privilégier **un correcteur type ruban** plutôt que liquide.

2. Vous devrez numéroter votre composition correctement dans l'encadré en haut de la copie.

Chaque numérotation doit contenir le numéro de la feuille et le nombre total de feuilles de votre composition. (Ex : 01/05 ; 02/05 ... 05/05).

3. Vous devrez, sur chaque feuille A3, remplir en **MAJUSCULES** toutes vos informations d'identification : Nom de naissance, Premier prénom, Numéro de candidature, rempli de gauche à droite, et Date de naissance.

Nom de naissance :	N	O	M																					
Premier prénom :	P	R	E	N	O	M																		
Numéro candidature :	0	0	0	0	1	2	3	4		Né(e) le :	0	1	/	0	7	/	1	9	9	2				
(Le numéro est celui qui figure sur la convocation ou la feuille d'émargement)																								
(Remplir cette partie à l'aide de la notice)																								
Concours / Examen : CONTROLEUR EXTERNE										Session : 2024														
Epreuve n° : 2										Matière : Matière choisie à l'inscription														
CONSIGNES																								
- Remplir soigneusement, sur CHAQUE feuille officielle, la zone d'identification en MAJUSCULES. - Ne pas signer la composition et ne pas y apporter de signe distinctif pouvant indiquer sa provenance. - Numéroté chaque feuille A3 dans le cadre à droite et placer les feuilles dans le bon sens et dans l'ordre. - Rédiger avec un stylo à encre foncée (bleue ou noire) et ne pas utiliser de stylo plume à encre claire. - N'effectuer aucun collage ou découpage de sujets ou de feuille officielle. Ne joindre aucun brouillon.																								
																		Feuille : <table border="1"><tr><td></td><td></td></tr></table> / <table border="1"><tr><td></td><td></td></tr></table>						

4. Il ne doit pas y avoir de rature dans le pavé d'identification. Si nécessaire, vous pouvez demander une feuille vierge au responsable de salle.

5. Vous devrez composer uniquement sur les supports de composition officiels de l'épreuve : les feuilles de format A3 comportant le bandeau d'identification.

6. Notez que dans tous les cas, les feuilles ne doivent être ni découpées, ni agrafées, ni collées.

Les copies sont anonymisées lors des opérations de scannage. Ainsi, les correcteurs n'ont aucune information sur l'identité du candidat.

→ Lors de la collecte des copies :

Vous devrez rendre **uniquement les feuilles de composition officielles**. Tout autre support (sujet, brouillon) sera écarté de la correction.

SUJET

MATHÉMATIQUES

Les candidates et les candidats peuvent avoir à leur disposition sur la table de concours le matériel d'écriture, une règle, un correcteur, des surligneurs et le matériel spécifique ci-après.

Les matériels autorisés sont les suivants :

- *les calculatrices non programmables sans mémoire alphanumérique ;*
- *les calculatrices avec mémoire alphanumérique et/ou avec écran graphique qui disposent d'une fonctionnalité « mode examen » ;*
- *les règles de calcul, équerres, compas, rapporteurs et tables de logarithmes ne comportant aucune formule algébrique, géométrique ou trigonométrique.*

Ce sujet comporte cinq exercices, indépendants les uns des autres.

Vous traiterez l'ensemble des exercices dans l'ordre choisi.

EXERCICE 1

Afin de pouvoir partir en vacances à tour de rôle, trois bergers, Arnaud, Béatrice et Claude, décident de regrouper leurs brebis en un seul troupeau. Les brebis d'Arnaud représentent 50 % du troupeau et celles de Béatrice 30 %. Il est avéré que 10 % des brebis d'Arnaud et 12 % des brebis de Béatrice sont galeuses. On suppose que cette sorte de gale est bénigne, ni curable, ni contagieuse et qu'ainsi ces pourcentages n'évoluent pas dans le temps. On note p , la proportion de brebis galeuses dans l'ensemble du troupeau. On choisit une brebis au hasard dans ce troupeau et on note :

A : l'évènement « la brebis est à Arnaud »

B : l'évènement « la brebis est à Béatrice »

C : l'évènement « la brebis est à Claude »

G : l'évènement « la brebis est galeuse »

Les résultats seront arrondis au millième près.

Partie A :

1°) Représenter la situation à l'aide d'un arbre que l'on pourra compléter ultérieurement.

2°) a) Calculer les probabilités des évènements $A \cap G$ et $B \cap G$.

b) En déduire $p(C \cap G)$ en fonction de p .

3°) Après un examen vétérinaire du troupeau, on constate que $p = 0,1$. Déterminer la proportion de brebis galeuses parmi celles de Claude.

4°) Une brebis choisie au hasard s'avère ne pas être galeuse, quelle est la probabilité qu'elle appartienne à Béatrice ou à Claude ?

Partie B :

Chaque soir, on enferme les brebis dans la grange sauf une, prise au hasard, qui pourra rester dans la maison pour tenir compagnie à Mushu le chien de berger. Au matin, cette brebis rejoint le troupeau. On note X , la variable aléatoire donnant le nombre de brebis galeuses ayant tenu compagnie le soir à Mushu sur une période de 10 jours.

1°) Donner, en justifiant, la loi de probabilité suivie par X ainsi que ses paramètres.

2°) Indiquer l'espérance mathématique, la variance et l'écart type de X .

3°) Calculer $p(X=2)$.

4°) Déterminer la probabilité qu'au moins une des « brebis de compagnie » soit galeuse.

EXERCICE 2

On considère la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par :

$$u_0=1 \text{ et pour tout entier naturel } n, u_{n+1}=\frac{1}{4}u_n+\frac{3}{4}n+1.$$

Les résultats seront arrondis au millièmè près.

Partie A :

1°) Rappeler l'expression simplifiée de la somme :

$$\sum_{k=1}^n k = 1+2+3+\dots+n$$

2°) a) Pour $q \neq 1$, rappeler l'expression de la somme suivante :

$$\sum_{k=0}^n q^k$$

b) En déduire la valeur de :

$$\sum_{k=0}^n \left(\frac{1}{4}\right)^k$$

Partie B :

1°) a) Calculer u_1 et u_2 .

b) Quelle conjecture peut-on formuler sur le sens de variation de la suite (u_n) ?

2°) On considère la proposition $P_n : u_n \leq n + \frac{4}{3}$.

a) Vérifier que P_0, P_1 et P_2 sont vraies.

b) Montrer que si P_k est vraie pour un entier naturel k alors P_{k+1} est vraie également.

Nous admettrons donc (axiome de récurrence) que la proposition P_n est vraie pour tout entier naturel n .

3°) a) Démontrer que pour tout entier naturel n on a :

$$u_{n+1} - u_n = \frac{3}{4} \left(n + \frac{4}{3} - u_n \right).$$

b) Conclure.

4°) On considère la suite (v_n) définie sur N par : $v_n = u_n - n$.

a) Démontrer que la suite (v_n) est géométrique et préciser ses éléments.

b) Montrer que pour tout entier naturel n on a : $u_n = \left(\frac{1}{4}\right)^n + n$.

c) La suite (u_n) est-elle convergente ?

5°) Exprimer en fonction de l'entier naturel n , la somme :

$$S_n = \sum_{k=0}^n u_k.$$

EXERCICE 3

Étant donné deux nombres réels strictement positifs a et b , avec $a \leq b$, on définit les moyennes suivantes :

– la moyenne arithmétique $m = \frac{a+b}{2}$;

– la moyenne géométrique $m_g = \sqrt{ab}$;

– la moyenne harmonique $m_h = \frac{2}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b}}$.

Partie A :

Le but de cette partie est de comparer tous ces nombres.

1°) Démontrer que $a \leq m_h$.

2°) a) Démontrer que $m_g \leq m$.

b) En déduire que pour tout couple de réels (A, B) strictement positifs on a :

$$\sqrt{\frac{1}{A} \times \frac{1}{B}} \leq \frac{\frac{1}{A} + \frac{1}{B}}{2}.$$

c) En déduire que $m_h \leq m_g$.

3°) Démontrer que $m \leq b$.

4°) Conclure.

Partie B :

Le but de cette partie est d'étudier des cas d'égalité(s).

1°) Montrer que si $a = b$, alors les trois moyennes sont égales.

2°) Dans quel(s) cas a-t-on $m_h = m$?

3°) Énoncer un théorème sur les cas d'égalité(s).

EXERCICE 4

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = (x+2)e^{-x}$. On notera C_f sa courbe représentative dans le plan rapporté au repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$ où l'unité est le centimètre.

Partie A – Quelques résultats préliminaires

1°) Démontrer, à l'aide d'une des formules du cours, que la dérivée de la fonction $x \rightarrow e^{-x}$ est la fonction $x \rightarrow -e^{-x}$.

2°) Déterminer les nombres réels a et b pour que la fonction F définie sur $\mathbb{R}$ par :

$F(x) = (ax+b)e^{-x}$ soit une primitive sur $\mathbb{R}$ de la fonction f .

3°) Justifier sans calcul que la limite de F en $+\infty$ est nulle.

Partie B – Étude de la fonction f

1°) Calculer les limites de la fonction f en $-\infty$ et $+\infty$. Commenter.

2°) Calculer la dérivée f' de la fonction f .

3°) Dresser le tableau de variation de la fonction f .

4°) Montrer que la tangente T à C_f au point A d'abscisse 0 a pour équation : $y = -x + 2$.

EXERCICE 5

L'espace est rapporté au repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. On considère les points $A(1; 0; 4)$, $B(7; 0; -2)$, $C(1; 6; -2)$ et $D(1; 0; -2)$.

1°) a) Calculer les coordonnées des vecteurs $\vec{AB}$ et $\vec{AC}$ puis le produit scalaire $\vec{AB} \cdot \vec{AC}$.

b) En déduire la mesure de l'angle $\widehat{BAC}$.

c) Quelle est la nature du triangle ABC ?

2°) a) Vérifier que le vecteur $\vec{n}(1; 1; 1)$ est orthogonal aux vecteurs $\vec{AB}$ et $\vec{AC}$.

b) Déterminer une équation cartésienne du plan (ABC) .

c) Déterminer une représentation paramétrique de la droite d perpendiculaire au plan (ABC) issue du point D .

3°) a) Déterminer l'intersection G de la droite d et du plan (ABC) .

b) Vérifier que G est aussi le centre de gravité du triangle ABC .

4°) Déterminer le rayon de la sphère (S) de centre D et tangente au plan (ABC) .

