

**CONCOURS EXTERNE POUR L'ACCÈS AU GRADE
D'INSPECTEUR DES FINANCES PUBLIQUES**

ANNÉE 2025

ÉPREUVE ÉCRITE D'ADMISSIBILITÉ N° 2

Durée : 3 heures – Coefficient : 5

Mathématiques

Toute note inférieure à 5/20 est éliminatoire.

*Le candidat trouvera au verso la manière de servir la copie dédiée.
Il devra obligatoirement se conformer aux directives données.*

NOTE AUX CANDIDATS

→ **Passation de l'épreuve :**

1. Sur les copies :

- vous devrez **composer lisiblement sur les copies avec un stylo foncé** : bleu ou noir. Toute copie illisible lors de la numérisation du fait d'une encre trop claire **ne sera pas corrigée (l'usage de stylo à encre effaçable est fortement déconseillé)** ;
- l'usage du surligneur et des stylos de couleurs est interdit ;
- pour toute correction, il est recommandé de privilégier **un correcteur type ruban** plutôt que liquide.

2. Vous devrez numéroter votre composition correctement dans l'encadré en haut de la copie.

Chaque numérotation doit contenir le numéro de la feuille et le nombre total de feuilles de votre composition. (Ex : 01/05 ; 02/05 ... 05/05).

3. Vous devrez, sur chaque feuille A3, remplir en MAJUSCULES toutes vos informations d'identification : Nom de naissance, Premier prénom, Numéro de candidature, rempli de gauche à droite, et Date de naissance.

Nom de naissance :

N	O	M																	
---	---	---	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--

Premier prénom :

P	R	E	N	O	M														
---	---	---	---	---	---	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--

Noméro candidature :

0	0	0	0	1	2	3	4		
---	---	---	---	---	---	---	---	--	--

 Né(e) le :

0	1
---	---

 /

0	7
---	---

 /

1	9	9	2
---	---	---	---

(Le numéro est celui qui figure sur la convocation ou la feuille d'émargement)

(Remplir cette partie à l'aide de la notice)

Concours / Examen : INSPECTEUR EXTERNE DES FINANCES PUBLIQUES Session : 2025

Epreuve n° : 2 Matière : Matière choisie à l'inscription

CONSIGNES

- Remplir soigneusement, sur CHAQUE feuille officielle, la zone d'identification en MAJUSCULES.
- Ne pas signer la composition et ne pas y apporter de signe distinctif pouvant indiquer sa provenance.
- Numéroter chaque feuille A3 dans le cadre à droite et placer les feuilles dans le bon sens et dans l'ordre.
- Rédiger avec un stylo à encre foncée (bleue ou noire) et ne pas utiliser de stylo plume à encre claire.
- N'effectuer aucun collage ou découpage de sujets ou de feuille officielle. Ne joindre aucun brouillon.

Feuille :

--	--

 /

--	--

4. Il ne doit pas y avoir de rature dans le pavé d'identification. Si nécessaire, vous pouvez demander une feuille vierge au responsable de salle.

5. Vous devrez composer uniquement sur les supports de composition officiels de l'épreuve : les feuilles de format A3 comportant le bandeau d'identification.

6. Notez que dans tous les cas, les feuilles ne doivent être ni découpées, ni agrafées, ni collées.

Les copies sont anonymisées lors des opérations de scannage. Ainsi, les correcteurs n'ont aucune information sur l'identité du candidat.

→ Lors de la collecte des copies :

Vous devrez rendre **uniquement les feuilles de composition officielles**. Tout autre support (sujet, brouillon) sera écarté de la correction.

SUJET

MATHÉMATIQUES

Les candidates et les candidats peuvent avoir à leur disposition sur la table de concours le matériel d'écriture, une règle, un correcteur, des surligneurs et le matériel spécifique ci-après.

Les matériels autorisés sont les suivants :

- les calculatrices non programmables sans mémoire alphanumérique ;
- les calculatrices avec mémoire alphanumérique et/ou avec écran graphique qui disposent d'une fonctionnalité « mode examen » ;
- les règles graduées, équerres, compas, rapporteurs.

Le candidat traitera, dans l'ordre de son choix, les quatre exercices suivants.

EXERCICE N° 1 : Intégrale de Wallis

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $W_n = \int_0^{\pi/2} (\cos x)^n dx$.

1. Calculez W_0 et W_1 .

2. Montrez à l'aide d'une intégration par parties que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $W_{n+2} = \frac{n+1}{n+2} W_n$.

3. (a) Montrez que la suite $(W_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante et à valeurs strictement positives.

(b) En déduire que $W_{n+1} \sim_{n \rightarrow \infty} W_n$.

4. (a) Vérifiez que la suite $((n+1)W_{n+1}W_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est constante.

(b) En déduire que $W_n \sim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{\frac{\pi}{2n}}$.

5. (a) Montrez à l'aide de la question 2 que : $\forall p \in \mathbb{N}$, $W_{2p} = \frac{(2p)!}{2^{2p}(p!)^2} \cdot \pi$.

(b) On peut montrer qu'il existe un réel A tel que : $n! \sim_{n \rightarrow \infty} A \sqrt{n} \left(\frac{n}{e}\right)^n$ (formule de Stirling).

Déduisez des deux questions précédentes la valeur de cette constante A .

6. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $Z_n = \int_0^{\pi/2} (\sin x)^n dx$.

Montrez, à l'aide d'un changement de variable que $Z_n = W_n$.

EXERCICE N° 2

Dans le plan muni d'un repère orthonormal direct $(O, \vec{i}, \vec{j})$. Soit C et C' les cercles d'équation $x^2+y^2-4=0$ et $x^2+y^2-8x+15=0$ respectivement.

1. Déterminez les centres Ω et Ω' , et les rayons R et R' , de ces cercles.
2. Soit $k = \frac{R}{R'}$, déterminez les coordonnées du centre I de l'homothétie de rapport k qui envoie Ω sur Ω' .
3. Soit $M_0 = (x_0, y_0)$ un point de C , quelle est l'équation de la tangente T_{M_0} en M_0 au cercle C ?
4. Déterminez le point A de C d'ordonnée positive et tel que la tangente à C en A passe par I .
5. Montrez que la droite (AI) est aussi tangente à C' .

EXERCICE N° 3

1. Quel est l'ordre de 5 dans le groupe $(\mathbb{Z}/64\mathbb{Z}, +)$?
2. Quel est l'ordre du groupe $((\mathbb{Z}/64\mathbb{Z})^*, \cdot)$? Quel est l'ordre de 5 dans $((\mathbb{Z}/64\mathbb{Z})^*, \cdot)$?
3. Montrez que pour tout $k \in \mathbb{Z}$, $5^k \not\equiv -1 \pmod{64}$. *Indication : Raisonner modulo 4.*
4. En déduire que l'application $\rho: (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/16\mathbb{Z}) \rightarrow (\mathbb{Z}/64\mathbb{Z})^*$ définie par :
 $\rho(\varepsilon, k) = (-1)^\varepsilon 5^k$ est un isomorphisme de groupes.
5. Le groupe $((\mathbb{Z}/64\mathbb{Z})^*, \cdot)$ est-il cyclique ? *Justifiez votre réponse.*

EXERCICE N° 4

L'objectif de cet exercice consiste à déterminer un polynôme $P(X)$ du septième degré tel que $P(X)+1$ soit divisible par $(X-1)^4$ et que $P(X)-1$ soit divisible par $(X+1)^4$.

1. Donnez une forme possible du polynôme dérivé $P'(X)$.
2. En déduire une expression de P à une constante près.
3. En utilisant une relation entre $P(1)$ et $P(-1)$, déterminez l'expression de P .

